**ПРОГРАММА ВИЗУАЛИЗАЦИИ И ПОДСЧЕТА ЧИСЛА ФРОБЕНИУСА НА ОСНОВЕ ДВУХКОНТУРНОЙ СЕТИ И ФОРМУЛЫ РЁДСЕТА**

*Химич Н. А., Быков А. Д., студенты гр. 124405.*

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*

*г. Минск, Республика Беларусь*

*Примичева З. Н. – канд. физ.-мат. наук. Доцент*

**Аннотация.** В данной работе составлена программа для подсчета числа Фробениуса в двух вариантах: с помощью двухконтурной сети и цепных дробей.

**Ключевые слова.** Число Фробениуса, двухконтурная сеть, формула Рёдсета.

**Введение.** Числом Фробениуса называется наибольшее целое число, которое не представимо в виде линейной комбинации

где — целые неотрицательные числа, — натуральные числа, взаимно простые в совокупности.

Задачу о нахождении числа Фробениуса еще называют *“Проблемой разменной монеты”.* Так как число Фробениуса — это максимальная сумма, которую нельзя выплатить имея купюры номиналом *.*

Множеством называется такое множество, в которое входят все целые числа, не удовлетворяющие линейной комбинации (1). Соответственно число Фробениуса будет максимальным представителем этого множества.

Известна формула нахождения числа Фробениуса при , выведенная Сильвестром [1]:

Для нахождения числа Фробениуса при используются цепные дроби, доказательство которых было приведено в работах Сельмера, Бейера и Рёдсета [3].

Для  известны формулы лишь для некоторых случаев, но доказано, что для фиксированного решение можно найти за полиномиальное время [4]. А при произвольно выбранном задача является NP-трудной.

Метод нахождения числа Фробениуса с использованием двухконтурных сетей рассмотрен Устиновым [2]. Краткий обзор этого метода представлен в пункте «Двухконтурная сеть». Визуализация элементов, использованных в этом методе, представлена в нашей программе.

Формула нахождения числа Фробениуса с использованием цепных дробей выведена Рёдсетом в его статье [3]. Эта формула представлена в пункте «Формула Рёдсета». Пошаговое нахождение числа Фробениуса по этой формуле представлена в нашей программе.

**Формула Джонсона [5].** При нахождении числа Фробениуса можно избавляться от общих делителей аргументов функции по формуле Джонсона

С учетом данной формулы в дальнейшем полагается, что .

**Двухконтурная сеть.** Допустим, что . Построим ориентированный граф с вершинами и ребрами двух типов: и c весами и соответственно:

На рисунке 1 приведен пример графа для. Черным пунктиром обозначены связи с весом . Синими обозначены связи с весом . Красным изгибом обозначен самый длинный путь с самым большим суммарным весом из вершины .

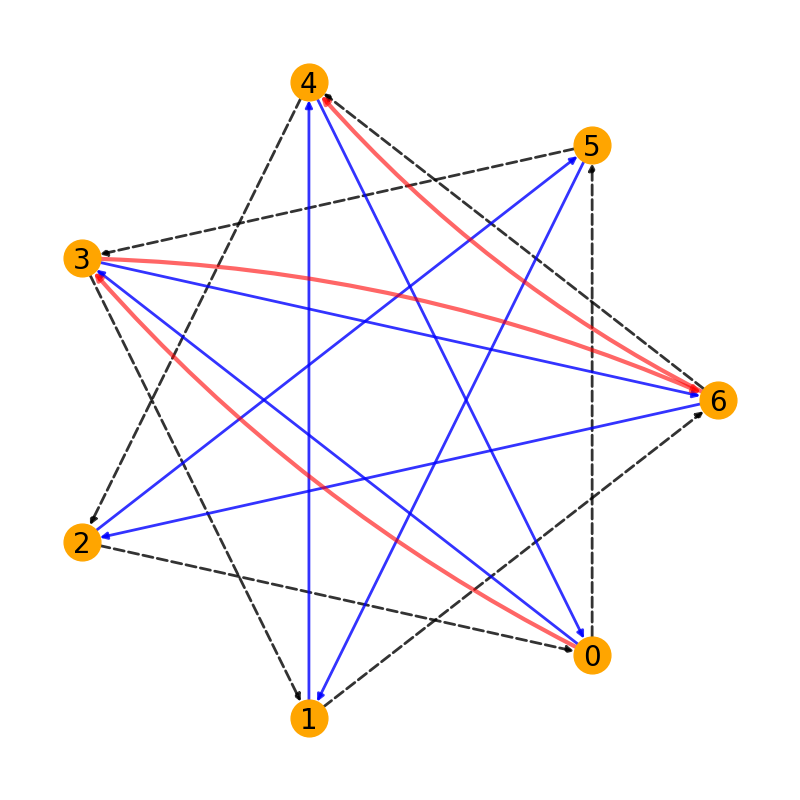


Рисунок 1 - Схема графа для

Введем функцию, которая определяет суммарный вес пути, где - количество ребер весом, а - количество ребер весом . Для каждого кратчайшего пути из вершины до каждой другой вершины графа поставим в соответствие клетку с координатами и запишем в нее значение - сумма весов маршрута. Получится двухконтурная сеть построенного графа (рисунок 2.1). Построим вторую двухконтурную сеть, для каждого значения запишем в клетку с координатами значение(рисунок 2.2). Из построения получим: чтобы дойти до вершины построенного графа с координатами , надо пройти ребер с весом , и ребер с весом .

Двухконтурная сеть (рисунок 2.1), построенная в соответствии с графом (рисунок 1), имеет-образную форму. Тогда пусть точка и - крайние правые точки ступеней построенной-образной диаграммы. В примере: и соответственно.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 2.1 | Рисунок 2.2 |

**Теорема 1**. Число Фробениуса равно:

**Формула Рёдсета.** Составим дробь , где – определяется равенством . Найдем последовательность чисел используя алгоритм Евклида в виде:

Тогда число  *можно представить в виде цепной дроби:*

Также определим целочисленную последовательность . Полагая, что и так как , то последовательность монотонно возрастает, монотонно убывает значит, имеет место неравенство:

Найдем номер такой, что .

**Теорема 2.** Число Фробениуса определяется по формуле:

**Результат работы.** Результатом работы является составленная нами программа, которая быстро подсчитывает число Фробениуса двумя способами (…) и рисует граф и двухконтурную сеть. Скриншот работы программы для примера приведен на рисунке 3.

**Части интерфейса программы.** Программа условно поделена на четыре части: поле ввода данных, поле вывода численных данных, 3 графика, относящиеся к методу двухконтурных сетей, и 1 график с подсчётом через формулу Рёдсета.

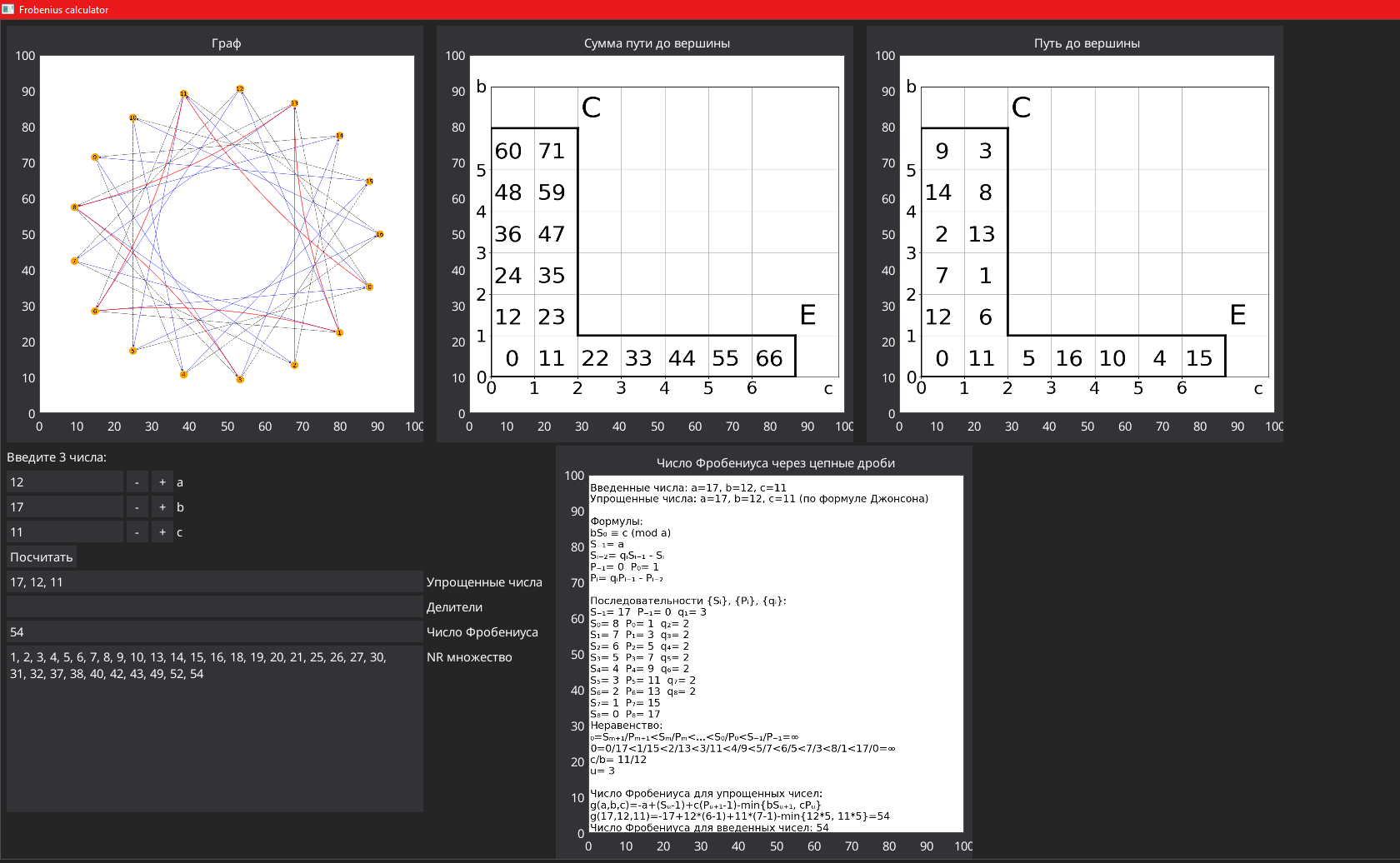
Часть ввода данных представлено в виде надписи «Введите три числа:» и трех полей ввода, где пользователь может ввести три числа, для которых будет посчитано число Фробениуса.

Ниже находиться кнопка «Посчитать», нажатие на которую запускает программу.

Часть вывода численных данных представлена в виде четырех полей: в поле «Упрощенные числа» выводятся числа после применения формулы Джонсона (3). В поле «Делители» выводятся общие делители аргументов функции, полученные при применении формулы Джонсона. В поле «Число Фробениуса» выводится посчитанное число Фробениуса с помощью Двухконтурной сети. И в поле «NR множество» выводиться множество.

Три графика «Граф», «Сумма пути до вершины» и «Путь до вершины» соответствуют рисункам 1, 2.1 и 2.2 в пункте «Двухконтурные сети».

График «Число Фробениуса через цепные дроби» содержит в себе алгоритм, описанный в пункте «Формула Рёдсета».



**Рисунок 3** - Результат работы программы для примера .

**Вывод.** Сконструированная программа позволяет быстро и наглядно вычислять число Фробениуса для , что при вычислении вручную заняло огромное количество времени. Так же, программа помогает разобраться в способах нахождения числа Фробениуса. За счет наглядности геометрического способа и структурированного вывода нахождения числа Фробениуса через цепные дроби, пользователь способен в краткие сроки обучиться методам нахождения числа Фробениуса.

Список использованных источников:

1. Sylvester J.J. Question 7382 // Educ. Times. 1884. V. 37. P. 26; Mathematics from the Educational Times, with additional papers and solutions // Mathematical questions, with their solutions, from the “Educational Times”. London: F. Hodgson, 1884. V. 41. P. 21.
2. A. V. Ustinov, Geometric proof of Rødseth’s formula for Frobenius numbers, Trudy Mat. Inst. Steklova, 2012, Volume 276, 280–287
3. Rodseth O.J. On a linear Diophantine problem of Frobenius // J. reine angew. Math. 1978. Bd. 301. S. 171–178.
4. Kannan R. Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem // Combinatorica. 1992. V. 12, N 2. P. 161–177.
5. Johnson S.M. A linear diophantine problem // Can. J. Math. 1960. V. 12. P. 390–398.